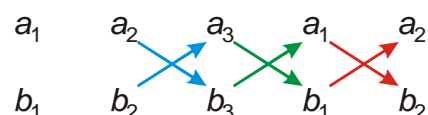


## 7.2.13 Vektorový součin II

### Předpoklady: 7212

V minulé hodině jsme skončili vzorcem pro výpočet vektorového součinu ze souřadnic vektorů  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ .

Jeden z nejhorších vzorců na zapamatování  $\Rightarrow$  našťastí jsou v něm určité pravidelnosti  $\Rightarrow$  dají se najít nějaké mnemotechnické pomůcky.

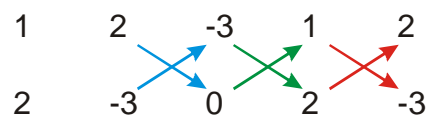


Šipka znamená součin čísel, která spojuje, šipky dolů jsou kladné, šipky nahoru záporné  $\Rightarrow$   
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$ .

**Pedagogická poznámka:** Při hodině nechávám studenty samostatně napsat už poslední souřadnici z předchozího součinu. Součin s konkrétními čísly pak studenti zkouší počítat sami. Občas se někomu podaří spočítat vektorový součin jako jedno číslo, pak nezbývá než se vrátit k tomu, že by každý měl mít základní očekávání toho, jak bude výsledek vypadat, což v případě vektorového součinu znamená trojici čísel.

Tento způsob zápisu je výhodnější nejen pro zapamatování vzorce, ale i pro výpočet vektorového součinu konkrétních vektorů.

Spočteme vektorový součin  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorů  $\mathbf{a} = (1; 2; -3)$  a  $\mathbf{b} = (2; -3; 0)$ .



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2 \cdot 0 - (-3) \cdot (-3); (-3) \cdot 2 - 0 \cdot 1; 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2) = (-9; -6; -7)$$

**Poznámka:** Pomůcek pro zápis vektorového součinu je samozřejmě víc. Autor sám používá tento a zdá se mu, že studentům činí jen velmi malé potíže s ním pracovat. Tím nijak nevylučuje používání jiných metod, sám jenom nabízí to, co se mu zdá nejlepší.

**Pedagogická poznámka:** Setkal jsem se i s tím, že žák pomocí schématu generoval vzorec a pak do něj dosazoval konkrétní čísla. Čím dříve se podaří takové postupy odchytnout, tím lépe.

**Př. 1:** Vypočti vektorový součin vektorů.

a)  $\mathbf{a} = (-2; 1; 3)$   $\mathbf{b} = (1; 2; 3)$

b)  $\mathbf{a} = (1; 2; 3)$   $\mathbf{b} = (-2; 1; 3)$

c)  $\mathbf{a} = (-2; 3; 1)$ ,  $\mathbf{b} = (4; -6; -2)$

Výsledky zkontroluj pomocí vlastností vektorového součinu.

a)  $\mathbf{a} = (-2; 1; 3)$   $\mathbf{b} = (1; 2; 3)$

$$\begin{array}{ccccc}
 -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 -2 & 1 & 3 & -2 & 1
 \end{array}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1 \cdot 3 - 3 \cdot 2; 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 3; (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 1) = (-3; 9; -5)$$

b)  $\mathbf{a} = (1; 2; 3)$   $\mathbf{b} = (-2; 1; 3)$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 -2 & 1 & 3 & -2 & 1
 \end{array}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2 \cdot 3 - 3 \cdot 1; 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 3; 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) = (3; -9; 5)$$

V příkladech a) a b) vyšly navzájem opačné vektory, protože jsme násobili v obou případech stejné vektory, ale v opačném pořadí.

c)  $\mathbf{a} = (-2; 3; 1)$ ,  $\mathbf{b} = (4; -6; -2)$

$$\begin{array}{ccccc}
 -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 4 & -6 & -2 & 4 & -6 \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 -2 & 3 & 1 & -2 & 3
 \end{array}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-6); 1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2); (-2) \cdot (-6) - 3 \cdot 4) = (0; 0; 0)$$

V příkladu c) vyšel nulový vektor, protože platí:  $\mathbf{b} = (-2)\mathbf{a} \Rightarrow$  násobíme dva vektory, které leží na jedné přímce.

**Př. 2:** Zapiš všechny vektory, které jsou kolmé na vektory  $\mathbf{u} = (2; 0; 1)$  a  $\mathbf{v} = (-1; 1; 5)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 -1 & 1 & 5 & -1 & 1 \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 -1 & 1 & 5 & -1 & 1
 \end{array}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0 \cdot 5 - 1 \cdot 1; 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 2; 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) = (-1; -11; 2)$$

Podmínku splňují i všechny další vektory, které jsou s vektorem  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  rovnoběžné  $\Rightarrow$  řešením jsou všechny vektory  $k(-1; -11; 2)$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

**Př. 3:** Najdi vektor  $\mathbf{c}$  ( $|\mathbf{c}| = 6$ ) kolmý na vektory  $\mathbf{a} = (1; 0; 1)$  a  $\mathbf{b} = (1; 2; 2)$ .

Vektor  $\mathbf{c}$  je kolmý na vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b} \Rightarrow$  je rovnoběžný s vektorovým součinem těchto vektorů  $\Rightarrow$  spočteme vektorový součin a pak ho vynásobíme vhodným číslem, aby měl požadovanou velikost.

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0 \cdot 2 - 2 \cdot 1; 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1; 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = (-2; -1; 2)$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

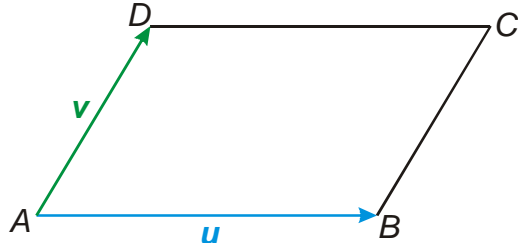
$\Rightarrow$

- $\mathbf{c}_1 = 2 \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{c}_1 = 2(-2; -1; 2) = (-4; -2; 4)$
- $\mathbf{c}_2 = (-2) \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{c}_2 = (-2)(-2; -1; 2) = (4; 2; -4)$

**Pedagogická poznámka:** Hodinu řídím tak, aby se na následujícím příkladu synchronizovala třída tak 15 minut před koncem hodiny.

**Př. 4:** Urči obsah rovnoběžníku  $ABCD$ , pokud platí:  $A[-1; -2; 1]$ ,  $B[2; 0; 2]$ ,  $C[1; 1; -1]$ .

Obsah rovnoběžníku  $ABCD$  můžeme určit z velikostí stran rovnoběžníku a úhlu, který svírají, vzorcem  $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha \Rightarrow$  poměrně dlouhé počítání (určení vektorů, spočtení jejich velikostí, výpočet úhlu pomocí skalárního součinu, dosazení do vztahu).



**Nápad:** výraz  $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha$  známe z definice vektorového součinu (jde o jeho velikost  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \alpha$ )  $\Rightarrow$  rychlejší postup: určíme vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ , určíme jejich vektorový součin  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  a jeho velikost  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$  se rovná obsahu obdélníku.

Souřadnice vektorů:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (3; 2; 1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} - \mathbf{B} = (-1; 1; -3) \quad (\text{souřadnice bodu } D \text{ neznáme, nemůžeme ho určit jako } D - A)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1; 1 \cdot (-1) - (-3) \cdot 3; 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) = (-7; 8; 5)$$

$$\text{Velikost vektoru } |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-7)^2 + 8^2 + 5^2} = \sqrt{138} \doteq 11,75.$$

**Pedagogická poznámka:** Samostatné vyřešení příkladu je spíše vzácností. Je třeba rozbor neodbyť, protože velká většina žáků si teprve v tomto okamžiku všimne, že velikost vektorového součinu má nějaký význam.

**Př. 5:** Urči obsah trojúhelníku  $ABC$ , pokud platí:  $A[-2; -2]$ ,  $B[3; -1]$ ,  $C[1; 4]$ .

Dva problémy:

- vektorový součin určuje obsah rovnoběžníku, pro trojúhelník platí:  $S = \frac{bc \sin \alpha}{2} \Rightarrow$  spočteme vektorový součin a jeho velikost vydělíme dvěma,
- vektorový součin je určen pouze pro vektory v prostoru, příklad je však zadán v rovině (spočítat jít musí, protože smysl má, navíc každou rovinu si můžeme představit umístěnou v prostoru)  $\Rightarrow$  přidáme k souřadnicím bodů třetí souřadnici (vždy stejnou, nejlépe nulovou).

$$\text{Body v prostoru: } A[-2; -2; 0], B[3; -1; 0], C[1; 4; 0].$$

$$\text{Vektory: } \mathbf{b} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (5; 1; 0), \mathbf{c} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = (3; 6; 0).$$

$$\text{Vektorový součin: } \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (1 \cdot 0 - 6 \cdot 0; 0 \cdot 3 - 0 \cdot 5; 5 \cdot 6 - 3 \cdot 1) = (0; 0; 27).$$

$$\text{Velikost vektorového součinu: } |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 27^2} = 27.$$

$$\text{Obsah trojúhelníku: } S = \frac{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}{2} = \frac{27}{2} = 13,5.$$

Trojúhelník má obsah 13,5.

**Dodatek:** Když si uvědomíme, že body  $A, B, C$  určují rovinu, ve které leží trojúhelník  $ABC$ , je jasné, že vektorový součin musí ležet ve směru na tuto rovinu kolmém a tedy ve směru, který jsme přidávali  $\Rightarrow$  jedinou jeho nenulovou souřadnicí bude  $z$ -ová.

**Př. 6:** Petáková:  
strana 103/cvičení 46 b)  
strana 103/cvičení 47 a)  
strana 103/cvičení 48 c)  
strana 103/cvičení 50  
strana 103/cvičení 51  
strana 103/cvičení 53

**Shrnutí:** Ze souřadnic vypočítáme vektorový součin pomocí schématu.